

XVI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛера

Региональный этап

31 января 2024 г.

8 класс

Первый день

1. Первоначально имеется один кусок сыра. Разрешается взять любой кусок сыра и проделать с ним одну из трех операций: разделить его на два куска одинакового веса, 11 кусков одинакового веса или 23 куска одинакового веса. Можно ли, используя только эти операции, разделить его на 2024 части одинакового веса?
2. У Олега есть набор из клетчатых прямоугольников размеров 1×1 , 1×2 , ..., 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить (без наложений и пробелов) какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?
3. На сторонах AB , BC , CA равностороннего треугольника ABC выбраны точки K , L , M соответственно так, что $AK = 1$, $BL = 2$, $CM = 3$. Известно, что $\angle MKL = 60^\circ$. Найдите сторону треугольника ABC .
4. По кругу стоят 100 белых точек. Аня и Боря красят по очереди по одной еще не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Аня. Аня хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Боря — чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Аня может гарантировать себе независимо от игры Бори?
5. Какие натуральные числа можно представить в виде $a^2 + 2023b^2 - 2024c^2$, где a , b , c — различные целые числа?