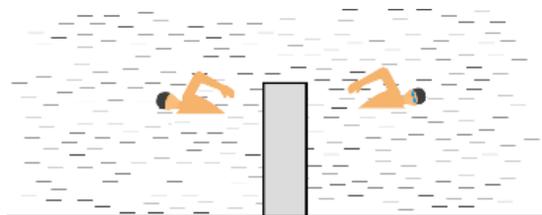


Задача 2.7.1. На речке (10 баллов). Петя и Вася решили выяснить кто быстрее плавает. Для этого они одновременно прыгнули с мостка в речку и поплыли вдоль берега в разные стороны. Через некоторое время t , по сигналу с берега они развернулись и поплыли обратно. В результате, Вася вернулся к месту старта через время $t/2$ после разворота, а Петя потратил на обратный путь время $2t$. Кто из мальчиков плавает быстрее? Во сколько раз отличаются скорости мальчиков от скорости течения реки?



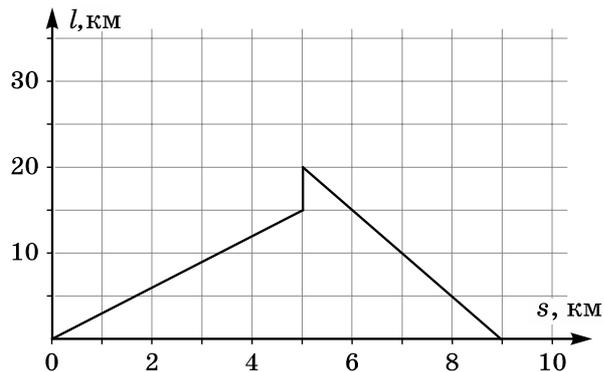
Возможное решение (М. Замятнин). Тот из мальчиков, который после старта поплыл по течению успел удалиться от мостка на расстояние $L_1 = (v_1 + v)t$, где v – скорость течения реки, и на обратный путь ему требуется больше времени, так как теперь приходится плыть против течения (это сценарий плавания Пети). Тогда $2t = L_1/(v_1 - v)$. Подставляя в полученную формулу L_1 , находим, что скорость Пети $v_1 = 3v$.

Вася сместился за время t на расстояние $L_2 = (v_2 - v)t$, и на обратный путь по течению ему потребовалось $t/2 = L_2/(v_2 + v)$. Откуда получим, что $v_2 = 3v$. Следовательно мальчики одинаково хорошо плавают и их скорость в 3 раза больше скорости реки.

№	Задача 2.7.1. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Выражение $L_1 = (v_1 + v)t$ для расстояния, на которое Петя отплыл от мостка	1,5
2	Выражение для времени $2t = L_1/(v_1 - v)$, которое Петя затратил на обратный путь	1,5
3	Скорость плавания Пети в стоячей воде выражена через скорость течения реки: $v_1 = 3v$	1
4	Выражение $L_2 = (v_2 - v)t$ для расстояния, на которое Вася отплыл от мостка	1,5
5	Выражение для времени $t/2 = L_2/(v_2 + v)$, которое Вася затратил на обратный путь	1,5
6	Найдено отношение скорости плавания мальчиков в стоячей воде и скорости течения реки: $v_1 = v_2 = 3v$	2
7	Сделан вывод, что мальчики одинаково хорошо плавают	1

Задача 2.7.2. Дорога до канала (10 баллов).

Глеб и Вова после кружка по физике отправились вдоль берега длинного прямого канала на прогулку. Вова поехал на велосипеде, а Глеб пошел в ту же сторону пешком. График зависимости расстояния l между ними от перемещения s Глеба приведен на рисунке.



Все время мальчики двигались с постоянными скоростями, но устав, Глеб сделал привал, в конце которого позвонил Вове и попросил его подъехать к нему, после чего продолжил движение в прежнем направлении. В результате ребята встретились через 2 часа после того как расстались. Определите:

- какой путь проехал Вова за всю прогулку до встречи с Глебом;
- сколько времени Глеб отдыхал на привале;
- чему равны скорости мальчиков.

Возможное решение (М. Замятнин). Глеб сделал привал через 5 км, так как до этого момента удаление Вовы увеличивалось пропорционально пройденному Глебом расстоянию, что соответствует движению с постоянными скоростями. Заметим, что к этому времени Вова удалился от Глеба на 15 км, а от места старта на 20 км. Следовательно, скорость Вовы в 4 раза больше скорости Глеба.

Пока Глеб отдыхал, Вова проехал еще 5 км, после чего по звонку друга развернулся и поехал навстречу. Глеб успел пройти вперед еще 4 км, а Вова проехать 16 км. Это соответствует условию сохранению их скоростей.

Всего путь Вовы составил $20+5+16 = 41$ км, а его скорость $41 \text{ км}/2 \text{ ч} = 20,5 \text{ км/ч}$. Скорость Глеба равна $20,5/4 \approx 5,1 \text{ км/ч}$.

Время привала можно найти по расстоянию, на которое за это время уехал Вова: $t = 5 \text{ км}/20,5 \text{ км/ч} \approx 14,6 \text{ мин}$.

№	Задача 2.7.2. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Правильно объяснен излом графика на 5-м километре	1
2	Найден путь Вовы на каждом из участков (по 1 баллу)	3
3	Найдена скорость Вовы	2
4	Установлено, что скорость Глеба меньше в 4 раза	1
5	Найдена скорость Глеба	1
6	Найдено время привала (способ и численный ответ)	2

Задача 2.7.3. Две кастрюли под дождём (10 баллов). Две цилиндрические кастрюли стояли под дождём. Первая наполнилась за время $T_1 = 4$ ч, а вторая – за $T_2 = 2$ ч. Если бы вода из второй кастрюли перетекала в первую с постоянным объемным расходом, то они наполнились бы одновременно за $T = 2,5$ ч.

Определите отношение высот h_1/h_2 , площадей S_1/S_2 и объёмов V_1/V_2 кастрюль. Интенсивность дождя считайте постоянной.

Примечание: под интенсивностью дождя понимается объём осадков, выпадающих за единицу времени на единичную площадку.

Возможное решение (К. Кутелев). Объём воды, которая попадает в кастрюлю в единицу времени, пропорционален площади кастрюли. Тогда условие заполнения кастрюль можно описать системой уравнений:

$$\begin{cases} uS_1T_1 = h_1S_1; \\ uS_2T_2 = h_2S_2; \end{cases} \quad (1)$$

где интенсивность u дождя – имеет размерность скорости (типичные значения интенсивности дождя 1 – 10 мм/ч).

Из системы (1) получаем
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{T_1}{T_2} = 2.$$

Обозначим символом V объём воды, перекачиваемый между кастрюлями в единицу времени. Тогда условие заполнения кастрюль можно описать системой уравнений:

$$\begin{cases} (uS_1 + V)T = h_1S_1; \\ (uS_2 - V)T = h_2S_2. \end{cases} \quad (2)$$

Подставим объёмы кастрюль из системы (1):

$$\begin{cases} (uS_1 + V)T = uS_1T_1; \\ (uS_2 - V)T = uS_2T_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(S_1 + \frac{V}{u}\right)T = S_1T_1; \\ \left(S_2 - \frac{V}{u}\right)T = S_2T_2. \end{cases}$$

После суммирования системы уравнений (3) получим:

$$(S_1 + S_2)T = S_1T_1 + S_2T_2; \Rightarrow \left(\frac{S_1}{S_2} + 1\right)T = \frac{S_1}{S_2}T_1 + T_2; \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{T_2 - T}{T - T_1} = \frac{1}{3}.$$

Найдём отношение объёмов:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_2} \frac{S_1}{S_2} = \frac{T_1(T_2 - T)}{T_2(T - T_1)} = \frac{2}{3}.$$

№	Задача 2.7.3. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Отмечено, что объем воды, попадающей в кастрюлю в единицу времени, пропорционален площади кастрюли	1
2	Записана система уравнений (1) или приведены рассуждения, показывающие, что $h_1 / h_2 = T_1 / T_2$	2
3	Получено соотношение $h_1 / h_2 = T_1 / T_2 = 2$	1
4	Записана система уравнений (2) или аналог	2
5	Найдено соотношение S_1 / S_2	3
6	Найдено соотношение V_1 / V_2	1

Примечания к критериям

1. Если в п.п. 3, 5 и 6 критериев найдены обратные отношения, то баллы ставятся полностью.
2. В п.3 и п.6 по 1 баллу ставится за правильную формулу с правильным численным ответом.
3. В п.5 ставится по 1 баллу за правильную формулу и 1 балл за правильный численный ответ.
4. Если какие-то критерии не выполнены явно (кроме требуемых в условии задачи п.п. 3,5,6), но косвенно используются в решении, то баллы за них должны быть выставлены полностью.

Задача 2.7.4. Северный экспресс (20 баллов). Экспериментатор Глюк во время поездки на экспрессе из Долгопрудного в Дубну записал показания T термометра за окном в зависимости от пройденного расстояния s . В пути поезд двигался почти с постоянной скоростью и сделал только одну остановку в Дмитрове. Узнав позже на сайте гидрометцентра как в этот день в течение времени t изменялась температура, Глюк рассчитал:

- время отправления экспресса из Долгопрудного;
- скорость экспресса;
- расстояние от Дмитрова до Дубны;
- примерную длительность остановки в Дмитрове.

Постройте графики зависимостей, приведенных в таблицах, и с их помощью получите зависимость пройденного экспрессом расстояния от времени. Постройте её график и определите то, что смог рассчитать экспериментатор.

Примечание: в одно и то же время на всем маршруте следования экспресса температура воздуха одинаковая.

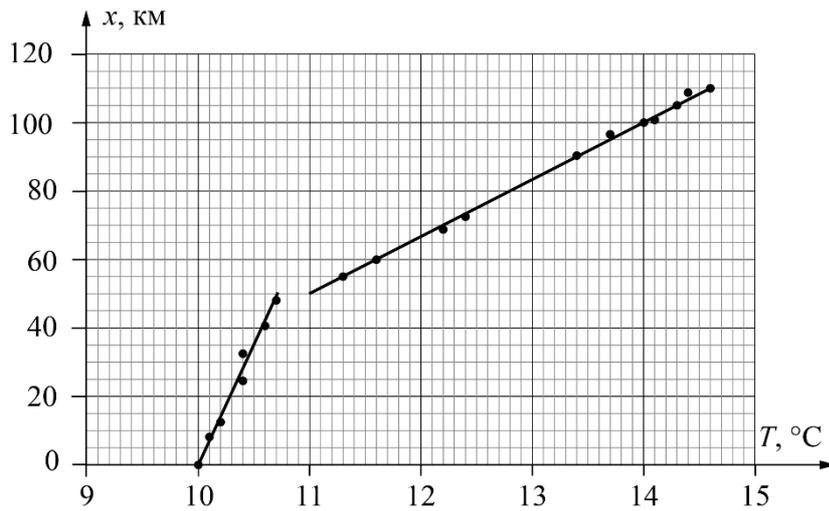
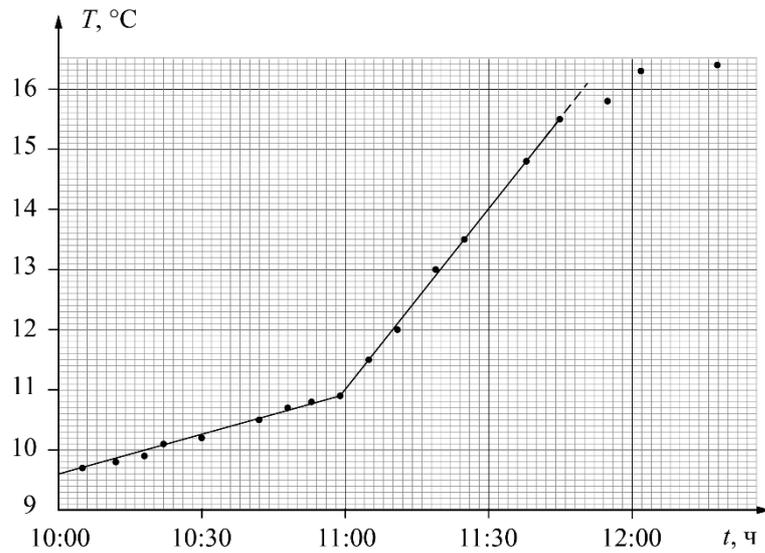
s , км	0	8	12	24	32	41	48	55	60
T , °C	10,0	10,1	10,2	10,4	10,4	10,6	10,7	11,3	11,6

s , км	69	73	90	96	100	101	105	108	110
T , °C	12,2	12,4	13,4	13,7	14,0	14,1	14,3	14,4	14,6

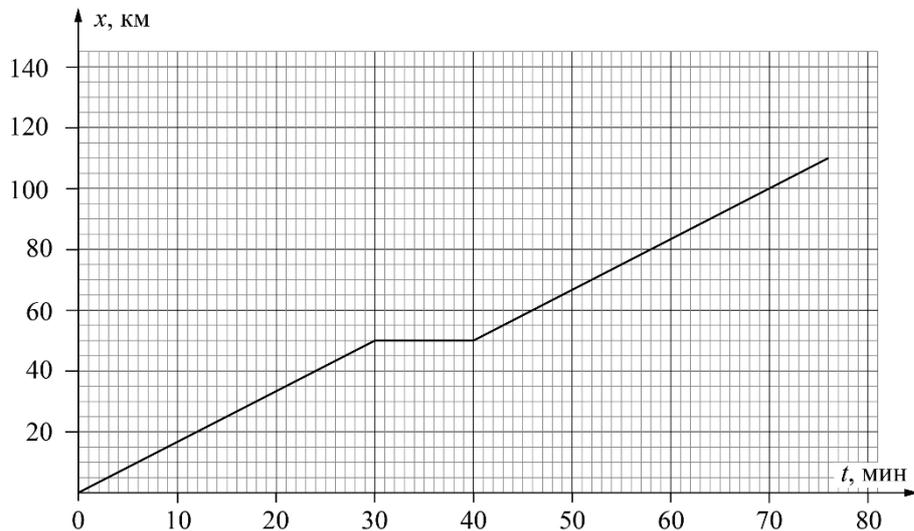
t , ч:мин	10:05	10:12	10:18	10:22	10:30	10:42	10:48	10:53	10:59
T , °C	9,7	9,8	9,9	10,1	10,2	10,5	10,7	10,8	10,9

t , ч:мин	11:05	11:11	11:19	11:25	11:38	11:45	11:55	12:02	12:18
T , °C	11,5	12,0	13,0	13,5	14,8	15,5	15,8	16,3	16,4

Возможное решение (М. Замятнин). По графику зависимости температуры от времени находим время, когда температура была $10,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ – это 10:20 – время начала движения.



По графику зависимости координаты от температуры получаем зависимость координаты от времени



Из которого находим остальные ответы на вопросы задачи

- скорость поезда 100 км/ч;
- от Дмитрова до Дубны 60 км;
- стоянка в Дмитрове длилась 10 мин.

№	Задача 2.7.4. Критерии оценивания (10 баллов)	Баллы
1	Построен график зависимости температуры от времени	4
	Подписаны оси и указаны единицы измерения	1 балл
	Выбран разумный масштаб координатных осей	1 балл
	Нанесены все экспериментальные точки	1 балл
	Проведена линия графика	1 балл
2	По графику находим время, когда температура была 10,0 °С	1
3	Построен график зависимости координаты от температуры	4
	Подписаны оси и указаны единицы измерения	1 балл
	Выбран разумный масштаб координатных осей	1 балл
	Нанесены все экспериментальные точки	1 балл
	Проведена линия графика	1 балл
4	Установлено соответствие между координатами x и временем t	2
5	Построен график зависимости координаты от времени	4
	Подписаны оси и указаны единицы измерения	1 балл
	Выбран разумный масштаб координатных осей	1 балл
	Нанесены все экспериментальные точки	1 балл
	Проведена линия графика	1 балл
6	Из графика находим скорость поезда (100 км/ч)	1
	Из графика находим расстояние от Дмитрова до Дубны (60 км)	2
	Из графика находим длительность стоянки в Дмитрове (10 мин)	2